



TITLE:

# 直方体容器の水平・鉛直方向への 共鳴的加振による水面波 (非線形波 動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

山崎, 徳幸; 船越, 満明

---

CITATION:

山崎, 徳幸 ...[et al]. 直方体容器の水平・鉛直方向への共鳴的加振による  
水面波 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録  
2017, 2034: 50-59

ISSUE DATE:

2017-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/236790>

RIGHT:

## 直方体容器の水平・鉛直方向への共鳴的加振による水面波

京都大学大学院・情報学研究科・複雑系科学専攻

山崎徳幸, 船越満明

Noriyuki Yamasaki and Mitsuaki Funakoshi

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems, Graduate School of Informatics,  
Kyoto University

### 1 序論

流体の入った容器を水平方向に加振すると, 共鳴により加振振動数に近い固有振動数をもった水面波が励起される. 一方, 流体の入った容器を鉛直方向に加振すると, 共鳴により加振振動数の半分に近い固有振動数をもった水面波が励起される. そして, 直方体容器に対しては, 水平方向のみに共鳴的加振を行った場合の水面波<sup>[1]</sup>, および鉛直方向のみに共鳴的加振を行った場合の水面波<sup>[2]</sup>がすでに理論的に調べられている. しかし, 水平方向と鉛直方向に同時に共鳴的な加振を行った場合の水面波の励起に関する研究は報告されていない.

そこで本研究では, 底面が正方形であるような直方体容器に対して, 水平方向と鉛直方向に同時に共鳴的な加振を行った場合に励起される水面波について調べる. 具体的には, 加振によって励起される, 同じ固有振動数をもつ2つの水面波モードの複素振幅に関するモデル方程式を導出し, この方程式の定常解および非定常解のパラメータ依存性について考察することを主な目的とする.

第2章では, 文献[1]と同様に減衰摂動法を用いて, 線形減衰の効果も考慮した, 水平方向と鉛直方向に共鳴的に加振を行った場合に励起される2つの水面波モードの振幅等のゆっくりとした時間変化を表すモデル方程式を導出する. モデル方程式のパラメータは線形減衰の係数, 水平加振の振動数とこれらのモードの固有振動数のずれ, 水平加振の振幅, 鉛直加振の振幅, 水平加振と鉛直加振の位相のずれの5つである. 第3章では, 様々なパラメータについて第2章で導出したモデル方程式の定常解を数値計算により求め, 定常解の各パラメータに対する依存性を調べる. また, 鉛直加振のみの場合<sup>[2]</sup>の定常解との比較を行う. さらに, 安定な定常解が存在しないような加振振動数の範囲における非定常解についても調べる. 第4章は, 本研究のまとめとなっている.

### 2 定式化

#### 2.1 水面波の基礎方程式と固有モード

底面が一辺  $\pi L$  の正方形である直方体容器に途中まで流体を入れて, 水深は十分大きく深さが無限大として近似できるとする. そして, この容器を水平および鉛直方向に共鳴的加振を行う場合を考える. 容器内の流体は非圧縮非粘性流体であり, その運動は渦なしであると仮定する. また, 励起された水面波は重力波であり, 表面張力の効果は無視できるとする. 図1のように, 容器に固定した非慣性直交座標系  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  を,  $\bar{x}$  軸と  $\bar{y}$  軸は容器の側壁に沿う水平方向に,  $\bar{z}$  軸は鉛直上向きに設定し, 静止状態の水面を  $\bar{z} = 0$  とする. 加振は  $\bar{x}$  軸方向および  $\bar{y}$  軸方向にのみ行うものとし,  $\bar{y}$  軸方向へは振動を加えない. これ以降, すべての変数は長さ  $L$  と時間  $\sqrt{L/g}$  を用いて無次元化されているものとする. ここで  $g$  は重力加速度であ

る。そして無次元化された空間座標を  $(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})/L$ ，無次元化された時間を  $t$  で表す。また，自由表面変位を  $z = \eta(x, y, t)$  で表す。

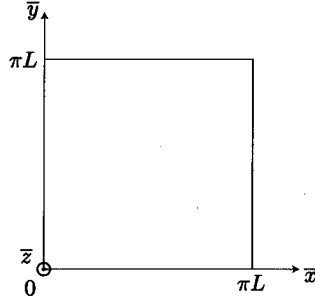


図 1: 容器の  $\bar{z} = 0$  断面図

非圧縮性流体の連続の方程式は

$$\text{div} \mathbf{u} = 0$$

と表される。ただし  $\mathbf{u}$  は流体の速度である。流体運動は渦なしであるので，流体の速度は速度ポテンシャル  $\phi$  を用いて  $\mathbf{u} = (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$  と表せる。ここで  $\partial_x \phi$  は  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  の意味で用いており，他の偏微分も同様である。連続の方程式は， $\phi$  を用いると

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{for } -\infty < z \leq \eta \quad (2.1)$$

となる。ここで  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  である。

次に， $\bar{x}$  軸， $\bar{y}$  軸， $\bar{z}$  軸がそれぞれ  $x$  軸， $y$  軸， $z$  軸と平行になるように設定された慣性座標系  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  において，加振による容器の変位が

$$\begin{cases} \bar{x} = -\alpha' \cos[\Omega t + \gamma] \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = -\beta' \cos 2\Omega t \end{cases} \quad (2.2)$$

で表されるとする。 $\Omega$  は水平方向への加振の振動数， $\gamma$  は水平加振と鉛直加振の位相のずれである。すると容器の加速度は，

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = \alpha' \Omega^2 \cos[\Omega t + \gamma] \\ \ddot{\bar{y}} = 0 \\ \ddot{\bar{z}} = 4\beta' \Omega^2 \cos 2\Omega t \end{cases}$$

となる。したがって，容器内の流体に加えられる外力  $\mathbf{K}$  は重力の効果も考慮すると

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\alpha' \Omega^2 \cos[\Omega t + \gamma] \\ 0 \\ -1 - 4\beta' \Omega^2 \cos 2\Omega t \end{pmatrix}$$

と表されるので，ベルヌーイの定理より自由表面での力学的境界条件は

$$\begin{aligned} \partial_t \phi + (1 + f_v \cos 2\Omega t) \eta + (f_h \cos(\Omega t + \gamma)) x \\ + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = 0, \quad \text{at } z = \eta \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ここで  $f_h = \alpha' \Omega^2$ ， $f_v = 4\beta' \Omega^2$  であり，それぞれ水平加振の加速度の振幅，鉛直加振の加速度の振幅を表す。

次に、自由表面は

$$F(x, y, z, t) \equiv z - \eta(x, y, t) = 0$$

で表される。自由表面上の流体粒子は自由表面から離れることはないので

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

が成り立つ。ただし  $\frac{D}{Dt}$  は物質微分を表し、 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  である。自由表面での運動学的境界条件は

$$\partial_t \eta - \partial_z \phi + \partial_x \eta \partial_x \phi + \partial_y \eta \partial_y \phi = 0, \quad \text{at } z = \eta \quad (2.4)$$

となる。

容器の底での境界条件は、容器の深さを無限大と仮定しているので

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0, \quad \text{as } z \rightarrow -\infty \quad (2.5)$$

である。また側壁での境界条件は、流体の法線方向の速度成分が 0 であることから

$$\partial_x \phi = 0, \quad \text{at } x = 0, \pi \quad (2.6a)$$

$$\partial_y \phi = 0, \quad \text{at } y = 0, \pi \quad (2.6b)$$

と表される。

式 (2.1) と境界条件 (2.5), (2.6) より、考えている直方体容器の水面波の固有モードの速度ポテンシャルは、一般に

$$\phi = c_{m,n} \cos(mx) \cos(ny) \exp(\sqrt{m^2 + n^2} z) \exp(i\omega_{m,n} t) + \text{c.c.}$$

と書ける。このモードを  $(m, n)$  モードと呼ぶことにすると、 $c_{m,n}$ ,  $\omega_{m,n}$  はそれぞれ  $(m, n)$  モードの速度ポテンシャルの複素振幅、固有振動数を表し、 $m, n = 0, 1, 2, \dots$ 、ただし  $(m, n) \neq (0, 0)$  である。また、c.c. はそれより前のすべての項の複素共役を表す。式 (2.3), (2.4) において加振の効果を見捨てる線形化した式より、固有振動数

$$\omega_{m,n} = \sqrt{m^2 + n^2}$$

を得る。

## 2.2 モデル方程式の導出

以下では、水平方向加振振動数  $\Omega$  は  $(m, n) = (1, 0), (0, 1)$  の 2 つの固有モードの固有振動数 1 に近いものとする。

式 (2.3), (2.4) を  $z = 0$  の周りで展開すると、それぞれ

$$\begin{aligned} & \partial_t \phi + (1 + f_v \cos 2\Omega t) \eta + (f_h \cos[\Omega t + \gamma]) x \\ & + \eta \partial_z \partial_t \phi + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \eta^2 \partial_z^2 \partial_t \phi \\ & + \frac{1}{2} \eta \partial_z [(\nabla \phi)^2] = 0, \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \eta - \partial_z \phi - \eta \partial_z^2 \phi + \partial_x \eta \partial_x \phi + \partial_y \eta \partial_y \phi \\ & - \frac{1}{2} \eta^2 \partial_z^3 \phi + \eta \partial_x \eta \partial_z \partial_x \phi \\ & + \eta \partial_y \eta \partial_z \partial_y \phi = 0, \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (2.7b)$$

となる。ただし、 $\eta$  と  $\phi$  について 4 次以上の項は無視している。

次に、 $f_h$  が  $\epsilon \ll 1$  を満たす正の定数  $\epsilon$  を用いて

$$f_h = \epsilon^3 \pi r_h \quad (2.8a)$$

と表されると仮定する。また  $f_v$  が

$$f_v = \epsilon^2 r_v \quad (2.8b)$$

と表されるものとする。 $r_h$  は水平加振の強さを表すパラメータ、 $r_v$  は鉛直加振の強さを表すパラメータである。また、 $\phi$  と  $\eta$  が  $\epsilon$  を用いて

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \cdots, \quad (2.9a)$$

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^3 \eta_3 + \cdots \quad (2.9b)$$

のように  $\epsilon$  のべき級数の形に展開されるものとする。そして、 $\Omega - 1 = O(\epsilon^2)$  と仮定し、

$$\Omega = 1 + \epsilon^2 \delta \quad (2.10)$$

と表す。ここで  $\delta$  は水平方向加振振動数と固有振動数のずれを表すパラメータである。さらに、引き延ばされた時間  $\tau = \epsilon^2 t$  を導入し、 $\eta$  と  $\phi$  は  $t$  と  $\tau$  の両方に依存すると仮定する。

式 (2.7) で  $\partial_t$  を  $\partial_t + \epsilon^2 \partial_\tau$  と置き換えた式に式 (2.9) を代入し、さらに式 (2.8) と式 (2.10) を用いると、 $O(\epsilon)$  の項より

$$\partial_t \phi_1 + \eta_1 = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (2.11a)$$

$$\partial_t \eta_1 - \partial_z \phi_1 = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (2.11b)$$

を得る。また  $O(\epsilon^2)$  の項より

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_2 + \eta_2 + \eta_1 \partial_z \phi_1 \\ + \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 = 0, \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \eta_2 - \partial_z \phi_2 - \eta_1 \partial_z^2 \phi_1 + \partial_x \eta_1 \partial_x \phi_1 \\ + \partial_y \eta_1 \partial_y \phi_1 = 0, \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (2.12b)$$

を得る。さらに  $O(\epsilon^3)$  の項より

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_3 + \eta_3 + \partial_\tau \phi_1 + r_v \eta_1 \cos 2(t + \delta \tau) \\ + (\pi r_h \cos(t + \delta \tau + \gamma)) x + \eta_1 \partial_z \phi_2 \\ + \eta_2 \partial_x \phi_1 + \frac{1}{2} \eta_1^2 \partial_z^2 \phi_1 + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \\ + \frac{1}{2} \eta_1 \partial_z [(\nabla \phi_1)^2] = 0, \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \eta_3 - \partial_z \phi_3 + \partial_\tau \eta_1 - \eta_1 \partial_z^2 \phi_2 \\ - \eta_2 \partial_z^2 \phi_1 - \frac{1}{2} \eta_1^2 \partial_z^3 \phi_1 + \partial_x \eta_1 \partial_x \phi_2 \\ + \partial_x \eta_2 \partial_x \phi_1 + \eta_1 \partial_x \eta_1 \partial_z \phi_1 + \partial_y \eta_1 \partial_y \phi_2 \\ + \partial_y \eta_2 \partial_y \phi_1 + \eta_1 \partial_y \eta_1 \partial_z \phi_1 = 0, \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (2.13b)$$

を得る.

また, 式 (2.1), (2.5), (2.6) の  $O(\epsilon^j)$  の項より

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_j = 0, & \text{for } -\infty < z \leq \eta, \\ |\nabla \phi_j| \rightarrow 0, & \text{as } z \rightarrow -\infty, \\ \partial_x \phi_j = 0, & \text{at } x = 0, \pi, \\ \partial_y \phi_j = 0, & \text{at } y = 0, \pi, \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

を得る.

$(m, n) = (1, 0), (0, 1)$  の2つのモードが共鳴的に励起されているので, 式 (2.11) と式 (2.14) を満たす  $\phi_1$  と  $\eta_1$  がそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi_1 = & a(\tau) \cos x \exp z \exp(it) \\ & + b(\tau) \cos y \exp z \exp(it) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.15a)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 = & -ia(\tau) \cos x \exp(it) \\ & -ib(\tau) \cos y \exp(it) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.15b)$$

と書き表されると仮定する. ここで  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  はそれぞれ  $(1, 0), (0, 1)$  モードの複素振幅を表す.

式 (2.1), (2.5), (2.6), (2.12), (2.15) より,  $\phi_2$  と  $\eta_2$  は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \phi_2 = & i\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \exp(2it) \\ & + i\frac{2}{7}(4 + \sqrt{2})ab \cos x \cos y \exp(2it) \exp(\sqrt{2}z) \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \frac{1}{2}(|a|^2 \cos 2x + |b|^2 \cos 2y) \\ & - \frac{1}{2}(a^2 \cos 2x + b^2 \cos 2y) \exp(2it) \\ & - \frac{5 - 4\sqrt{2}}{7}ab \cos x \cos y \exp(2it) \\ & + ab^* \cos x \cos y + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.16b)$$

ただし \* は複素共役を表す.

式 (2.15) と式 (2.16) を式 (2.13) に代入すると, 以下の方程式を得る.

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_3 + \eta_3 = & -\frac{\pi}{2} r_h \exp(it) \exp(i\delta\tau) \exp(i\gamma)x \\ & + p_1 \cos x \exp(it) \\ & + p_2 \cos y \exp(it) \\ & + C + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \eta_3 - \partial_z \phi_3 = & q_1 \cos x \exp(it) \\ & + q_2 \cos y \exp(it) \\ & + D + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.17b)$$

ただし,  $C, D$  は  $\cos x$  または  $\cos y$  をかけて  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$  の範囲で積分すると 0 になる項, もしくは  $\exp(3it)$  に比例する項を表し, また  $p_j, q_j (j=1, 2)$  は

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = -\frac{da}{d\tau} - i\frac{7}{8}a|a|^2 + i\frac{10\sqrt{2}-9}{14}a|b|^2 \\ \quad - i\frac{5}{4}a^*b^2 - i\frac{1}{2}r_v a^* \exp(2i\delta\tau) \\ p_2 = -\frac{db}{d\tau} - i\frac{7}{8}b|b|^2 + i\frac{10\sqrt{2}-9}{14}|a|^2b \\ \quad - i\frac{5}{4}a^2b^* - i\frac{1}{2}r_v b^* \exp(2i\delta\tau) \\ q_1 = i\frac{da}{d\tau} - \frac{1}{8}a|a|^2 - \frac{1+2\sqrt{2}}{14}a|b|^2 - \frac{1}{4}a^*b^2 \\ q_2 = i\frac{db}{d\tau} - \frac{1}{8}b|b|^2 - \frac{1+2\sqrt{2}}{14}|a|^2b - \frac{1}{4}a^2b^* \end{array} \right. \quad (2.18)$$

である. ここで式 (2.14) を満たし, かつ  $\cos x \exp(it)$  あるいは  $\cos y \exp(it)$  に比例する  $\phi_3, \eta_3$  の特殊解として

$$\phi'_3 = (\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos y) \exp z \exp(it) + \text{c.c.} \quad (2.19a)$$

$$\eta'_3 = (\beta_1 \cos x + \beta_2 \cos y) \exp(it) + \text{c.c.} \quad (2.19b)$$

を考える. 式 (2.19) を式 (2.17) の左辺に代入し, 両辺に  $\cos x$  をかけて  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$  の範囲で積分すると

$$i\alpha_1 + \beta_1 = 2r_h \exp(i\delta\tau) \exp(i\gamma) + p_1 \quad (2.20a)$$

$$-\alpha_1 + i\beta_1 = q_1 \quad (2.20b)$$

を得る. 同様に式 (2.17) の両辺に  $\cos y$  をかけて積分すると

$$i\alpha_2 + \beta_2 = p_2 \quad (2.21a)$$

$$-\alpha_2 + i\beta_2 = q_2 \quad (2.21b)$$

を得る. 方程式 (2.20), (2.21) がそれぞれ解をもつためには

$$2r_h \exp(i\delta\tau) \exp(i\gamma) + p_1 = -iq_1 \quad (2.22a)$$

$$p_2 = -iq_2 \quad (2.22b)$$

が成り立たなければならない. 式 (2.22) に式 (2.18) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -iua|a|^2 - iua|b|^2 - iua^*b^2 \\ &\quad - i\frac{1}{4}r_v a^* \exp(2i\delta\tau) + r_h \exp(i\delta\tau) \exp(i\gamma) \end{aligned} \quad (2.23a)$$

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\tau} &= -iub|b|^2 - iu|a|^2b - iua^2b^* \\ &\quad - i\frac{1}{4}r_v b^* \exp(2i\delta\tau) \end{aligned} \quad (2.23b)$$

を得る。ここで  $u = \frac{1}{2}, v = -\frac{4\sqrt{2}-5}{14}, w = \frac{3}{4}$  である。さらに  $a(\tau) = A(\tau) \exp(i\delta\tau), b(\tau) = B(\tau) \exp(i\delta\tau)$  とし、線形減衰の効果を加えると、式 (2.23) より、以下のモデル方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} = & -\alpha A - i\delta A - iu|A|^2 A - i(v+w)|B|^2 A \\ & - 2wMB - i\frac{1}{4}r_v A^* + r_h \exp(i\gamma) \end{aligned} \quad (2.24a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{d\tau} = & -\alpha B - i\delta B - iu|B|^2 B - i(v+w)|A|^2 B \\ & + 2wMA - i\frac{1}{4}r_v B^* \end{aligned} \quad (2.24b)$$

ただし  $M = i\frac{A^*B - AB^*}{2}$  であり、 $\alpha$  は線形減衰の係数である。

式 (2.24) については、

$$(A, B, \gamma) \leftrightarrow (-A, B, \gamma + 180^\circ) \quad (2.25)$$

という変換が成り立つ。すなわち、 $(A, B) = (A', B')$  が  $\gamma = \gamma'$  のときの式 (2.24) の解であるならば、 $(A, B) = (-A', B')$  は  $\gamma = \gamma' + 180^\circ$  のときの式 (2.24) の解である。したがって、 $0^\circ \leq \gamma < 180^\circ$  の範囲についてのみ調べれば、この範囲外の  $\gamma$  については簡単な変換により水面波の挙動がわかる。

モデル方程式 (2.24) では、線形減衰の強さを表す  $\alpha$ 、水平加振の振動数と固有振動数のずれを表す  $\delta$ 、水平加振の強さを表す  $r_h$ 、鉛直加振の強さを表す  $r_v$ 、水平加振と鉛直加振の位相のずれを表す  $\gamma$  の5つがパラメータとなっている。第3章では式 (2.24) を用いて数値計算を行った結果を示す。

### 2.3 $M$ について

式 (2.15b) において、 $a = a_r + ia_i, b = b_r + ib_i$  のように実数部と虚数部に分けて表すと、

$$\begin{aligned} \eta_1 = & 2(a_r \cos x \sin t + a_i \cos x \cos t \\ & + b_r \cos y \sin t + b_i \cos y \cos t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。ここで水面波の節点  $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  の近傍に局所的な極座標

$$\begin{cases} x = r' \cos \psi + \frac{\pi}{2} \\ y = r' \sin \psi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (r' \ll 1)$$

を導入する。式 (2.26) を  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  の周りで展開して極座標を用いて表し、 $r'$  の1次の項だけを残すと、

$$\begin{aligned} \eta_1 = & -2r'(a_r \cos \psi \sin t + a_i \cos \psi \cos t \\ & + b_r \sin \psi \sin t + b_i \sin \psi \cos t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。 $r' \neq 0$  に対して  $\eta_1 = 0$  を満たす  $\psi$ 、すなわち水面波の節線方向を  $\psi_n(t)$  と表すとすると、式 (2.27) より

$$\tan \psi_n = -\frac{a_r \sin t + a_i \cos t}{b_r \sin t + b_i \cos t}$$

が成り立つ。したがって  $M = a_i b_r - a_r b_i$  であることを用いると、

$$\frac{d\psi_n}{dt} = M \cdot \left( \frac{\cos \psi_n}{b_r \sin t - b_i \cos t} \right)^2 \quad (2.28)$$

となる。式 (2.28) は  $M$  の符号が正であれば水面波の節線が反時計回りに、符号が負であれば節線が時計回りに回転することを表している。言いかえると、 $M > 0 (M < 0)$  の解は波のパターンが反時計回り (時計回り) に回転する回転波、 $M = 0$  の解は波のパターンが回転しない非回転波となる。



また、水面波の定常解が  $M = 0$  をみたす場合を考える。式 (2.24) において左辺を 0 とし、さらに  $M = A_i B_r - A_r B_i = 0$  とする。ただし、 $A = A_r + iA_i, B = B_r + iB_i$  である。方程式を解くと  $B_r = B_i = 0$ 、つまり  $B = 0$  となる。したがって式 (2.24) が  $M = 0$  を満たす定常解をもつのは、 $(0, 1)$  モードの波が加振により励起されず、 $(1, 0)$  モードの波のみが励起される場合である。

## 2.4 容器の動きについて

加振による容器の変位は式 (2.2) で表される。式 (2.2) を満たす点の軌跡を、いくつかの  $\gamma$  に対して  $\tilde{x}\tilde{z}$  平面上に表すと図 2 のようになる。ただし、図 2 では  $\alpha'$  と  $\beta'$  が同程度の大きさであるように描いているが、実際は  $f_h \ll f_v$  より  $\alpha' \ll \beta'$  であり、 $\tilde{x}$  方向への変位と比べて  $\tilde{z}$  方向への変位の方がずっと大きくなる。

式 (2.2) において  $\gamma \rightarrow \gamma + 180^\circ$  とすると、 $\tilde{x} \rightarrow -\tilde{x}$  となるので、図 2 の (a) と (e) での容器の運動の軌跡は  $\tilde{x} = 0$  に関して線対称となる。また、図 2 の (b) と (d) については、描く軌跡は同じであるが容器の動き方は異なることがわかる。

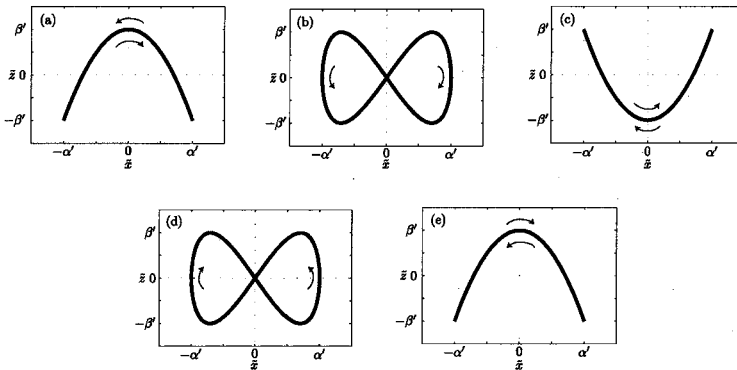


図 2: 容器の運動の軌跡図。(a)  $\gamma = 0^\circ$ , (b)  $\gamma = 45^\circ$ , (c)  $\gamma = 90^\circ$ , (d)  $\gamma = 135^\circ$ , (e)  $\gamma = 180^\circ$ . 容器は矢印の方向へ運動を行う。

## 3 数値計算結果

### 3.1 定常解

式 (2.24) を実部と虚部に分け、左辺を 0 とした 4 つの連立非線形方程式の解をプレント法により計算し、定常解を求めた。また、定常解の安定性の判定は、各定常解での式 (2.24) のヤコビ行列の固有値を計算し、すべての固有値の実部が 0 以下であれば安定、そうでなければ不安定とした。

まず、 $r_h = 1.0, \gamma = 0^\circ, \alpha = 0.3$  の場合に、鉛直加振の大きさ  $r_v$  を  $0 \leq r_v \leq 1.0$  の範囲で変化させたときの、定常解の変化を調べた。 $r_v = 0$  のとき、加振は水平加振のみであり、文献 [1] によって調べられている。 $|\delta|$  が十分大きい範囲においては振幅の小さい、安定な非回転波のみが見られた。また、安定な回転波が存在する  $\delta$  の領域が 2 つ確認された。さらに、回転波・非回転波ともに安定な解が存在しないような  $\delta$  の領域も見られた。 $r_v$  を 1.0 まで大きくすると、 $r_v = 0$  のときと同様に、 $|\delta|$  が十分大きい範囲においては振幅の小さい、安定な非回転波のみが確認され、回転波・非回転波ともに安定な解が存在しないような

$\delta$  の領域も確認された。安定な回転波が存在する 2 つの領域のうち、 $\delta$  が小さい方の領域は、 $r_v = 0$  の場合よりも広い範囲の  $\delta$  で存在するようになり、また、振幅も大きくなる。一方で、 $\delta$  が大きい方の領域は、 $r_v = 0$  の場合と比較して目立った変化は見られなかった。

次に、 $r_h = r_v = 1.0, \alpha = 0.3$  の場合に、水平加振と鉛直加振の位相のずれ  $\gamma$  について、 $\gamma = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  と変化させたときの、定常解の変化を調べた。その結果、どの  $\gamma$  においても、 $|\delta|$  が十分大きい範囲においては振幅の小さい、安定な非回転波のみが確認され、回転波・非回転波ともに安定な解が存在しないような  $\delta$  の領域も確認された。また、安定な回転波が存在する 2 つの領域のうち、 $\delta$  が小さい方の領域は、 $\gamma = 45^\circ$  のときに  $\delta$  の範囲が最も狭く、 $\gamma = 135^\circ$  のときに最も広くなった。一方で、 $\delta$  が大きい方の領域は、 $\gamma$  の値の変化による目立った差異は見られなかった。

最後に、 $r_v = 1.0$  の場合に、水平加振の大きさ  $r_h$  を 0 に近づけた時の、定常解の変化を調べた。 $r_h = 0$  のとき、加振は鉛直加振のみであり、 $r_v < 4\alpha$  の場合は、全ての  $\delta$  において、 $A = B = 0$  の安定な定常解（静止解）のみが存在し、 $r_v > 4\alpha$  の場合は、4 つに分類される定常解が存在することが文献 [2] によって調べられている。まず、 $\alpha = 0.3, \gamma = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 、つまり  $r_v < 4\alpha$  を満たす場合について調べた。その結果、どの  $\gamma$  においても  $r_h = 0.01$  とすると、非常に小さな振幅の安定な非回転波のみが存在するようになった。次に、 $\alpha = 0.2, \gamma = 0^\circ$ 、つまり  $r_v > 4\alpha$  を満たす場合について調べた。 $r_h = 0.01$  とすると、定常解に鉛直加振のみの場合の定常解と同様の特徴が見られた。

### 3.2 非定常解

安定な定常解が存在しないような  $\delta$  の領域について、連立常微分方程式 (2.24) の解の時間発展をアダムス法を用いて計算し、ポアンカレ断面および最大リアプノフ指数を求めることによって非定常解を調べた。解のポアンカレ断面は、過渡状態後の解軌道が超平面  $A_r = \langle A_r \rangle$  を  $A_r$  が減少する方向に横切るときの  $M$  の値をプロットすることで作成した。ここで  $\langle A_r \rangle$  は各  $\delta$  における解軌道の  $A_r$  の平均値である。

$r_h = r_v = 1.0, \gamma = 0^\circ, \alpha = 0.3$  のとき、 $\delta$  を負の方向へ変化させた場合と、正の方向へ変化させた場合について調べた。その結果、いずれの場合にも周期解やカオス解が見られた。カオス解には、ポアンカレ断面に一方の  $M$  の符号のみが見られる片方向カオスと、両方の  $M$  の符号が見られる両方向カオスが存在した。解が両方向カオスとなるような場合には、片方向カオスの解に比べて大きな値の最大リアプノフ指数を示した。また、一部の  $\delta$  の範囲においてはヒステリシス現象も確認された。さらに、 $\delta$  を負の方向へ変化させた場合、安定な定常解が存在する  $\delta$  に対して、周期解に漸近する振る舞いも見られた。

## 4 まとめ

流体を途中まで入れた底面が正方形であるような直方体容器を、水平方向と鉛直方向に同時に共鳴的に加振を行った場合に励起される水面波の運動を表すモデル方程式を導出した。モデル方程式のパラメータは、線形減衰の強さを表す  $\alpha$ 、水平加振の振動数と励起される 2 つの水面波モードの固有振動数のずれを表す  $\delta$ 、水平加振の強さを表す  $r_h$ 、鉛直加振の強さを表す  $r_v$ 、水平加振と鉛直加振の位相のずれを表す  $\gamma$  の 5 つである。

導出したモデル方程式を用いて、数値計算により定常解および非定常解の各パラメータに対する依存性について調べ、次の結果を得た。

- $r_v$  を大きくしていくと、振幅の大きい安定な回転波の存在する  $\delta$  の領域が広がる。
- $\gamma$  を変えたとき、振幅の大きい安定な回転波の存在する  $\delta$  の領域は、 $\gamma = 45^\circ$  のときに最も狭くなり、 $\gamma = 135^\circ$  のときに最も広くなる。
- $r_h$  が十分小さな値をとるとき、定常解は鉛直加振のみの場合の定常解と同様の特徴を持つ。

- 安定な定常解が存在しない  $\delta$  の範囲において，周期解やカオス解が見られ，また，ヒステリシス現象も見られた。

## 参考文献

- [1] K. Yoshimatsu and M. Funakoshi, "Surface Waves in a Square Container Due to Resonant Horizontal Oscillations," J. Phys. Soc. Jpn., (2001) Vol. 70, pp. 394-406.
- [2] M. Nagata, "Nonlinear Faraday Resonance in a Box with a Square Base," J. Fluid Mech., (1989) Vol. 209, pp.265-284.